Allgemeine Lösung

der

Magnetisirungs-Gleichungen

für den Ring.

(Gekrönte Preis-Schrift.)

Der hohen philosophischen Facultät

der

K. B. Ludwig-Maximilians-Universität in München

als

Dissertatio inauguralis

vorgelegt von

J. R. Schütz.

München 1893.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Allgemeine Lösung

der

Magnetisirungs-Gleichungen

für den Ring.

(Gekrönte Preis-Schrift.)

Der hohen philosophischen Facultät

der

K. B. Ludwig-Maximilians-Universität in München

als

Dissertatio inauguralis

vorgelegt von

J. R. Schütz.

München 1893.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

§ 1. Herleitung der Magnetisirungsgleichungen. Literatur der Lösungen.

1. Das Potential (—Φ) eines magnetischen Systems in Bezug auf einen beliebig gelegenen Aufpunkt kann als die Summe zweier Potentiale

$$-\Phi = V + U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

aufgefasst werden. V rührt von jenem Theile des Systems her, dessen magnetischer Zustand als independent vorausgesetzt wird, dem „magnetisirenden", U dagegen von jenem, dessen Zustand wesentlich durch das magnetische Feld bedingt wird, dem „magnetisirten".

2. Das magnetische Potential eines magnetisirten Körpers ist gleich dem Newton'schen Potentiale seiner freien Magnetismen

$$U = \iiint \frac{M_i}{r}\, dx\, dy\, dz + \int \frac{M_o}{r}\, do.$$

$M_i = -\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$ ist hiebei die Dichte des freien Magnetismus im Innern des Volumelements dx dy dz und

$M_o = -\nu$ die Flächendichte desselben auf dem Oberflächenelemente do.

r ist die Entfernung des Volum —, bezw. Oberflächenelementes vom Aufpunkte.

α, β, γ, ν sind die spezifischen magnetischen Momente, geschätzt nach den 3 rechtwinkligen Coordinatenrichtungen und nach der nach innen gezogenen Oberflächen-Normale N_i.

Es ist eine Forderung der Poisson'schen Magnetisirungstheorie, dass diese spezifischen magnetischen Momente den magnetischen Kräften proportional sind; darnach ist, wenn k den Proportionalitätsfaktor bezeichnet,

$$\alpha = k\frac{d\Phi}{dx},\ \beta = k\frac{d\Phi}{dy},\ \gamma = k\frac{d\Phi}{dz},\ \nu = k\frac{d\Phi}{dN_i}.$$

Die Einführung dieser Werte in den Ausdruck für U ergibt

$$U = -k \iiint \frac{\Delta\Phi}{r}\, dx\, dy\, dz - k \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dN_i}\, do.$$ *)

3. Substituirt man dies in die Gleichung I und wendet auf diese sodann die Δ-Operation an, so erhält man für alle Punkte im Innern des magnetisirten Körpers

$$-\Delta\Phi = +4\pi k \cdot \Delta\Phi,$$

woraus folgt

$$\Delta\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

und

$$U = -k \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dN_i}\, do. \quad \ldots\ldots \text{III)}$$

Durch die Gleichungen I und III ist der Zustand des magnetisirten Körpers vollkommen definirt.

4. Eine allgemeine Lösung dieser Gleichungen gab *Poisson* in den Mémoires de l'Académie 1824 für die Kugel und *Franz Neumann* in Crelle's Journal 1847, Bd. 37 für das Rotations-Ellipsoid. Einen Grenzfall, in welchem die Lösung Neumann's versagt, das unendlich verlängerte Rotations-Ellipsoid, behandelte *Kirchhoff* 1853 im 48. Bande desselben Journals und *Boltzmann* hat in seiner dem Andenken dieses Mannes gewidmeten Rektorats-Rede (Barth 1888, pag. 27) darauf aufmerksam gemacht, dass durch diese Arbeit Kirchhoff's im Zusammenhalte mit den Untersuchungen *Carl Neumann's* über Ring-Potentiale (Halle 1864) alle Vorbedingungen zur allgemeinen Lösung der Magnetisirungsgleichungen auch für den Fall eines Ringes geschaffen seien.

Diese allgemeine Lösung soll im Folgenden zunächst entwickelt werden.

---

*) Ist k als Funktion der Coordinaten vorausgesetzt, dann muss natürlich dieser Ausdruck so geschrieben werden:

$$U = -\iiint \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(k\frac{d\Phi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(k\frac{d\Phi}{dz}\right)\right] dx\, dy\, dz - \int \frac{1}{r} k \frac{d\Phi}{dN_i}\, do.$$

Nach partieller Integration des dreifachen Integrals fällt das Oberflächenintegral weg und es bleibt

$$U = +\iiint \left[\frac{d\Phi}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right] k \cdot dx\, dy\, dz \quad \ldots\ldots \text{IIIa)}$$

Die Gleichungen I und III sind die Poisson'schen, die Gleichungen I und IIIa die Kirchhoff'schen Grundgleichungen der Magnetisirungstheorie. (Vgl. Kirchhoff, Crelle's Journal, 1853, Bd. 48 Gleichung 24.)

§ 2. Lösung für magnetisirende Kräfte mit eindeutiger Potentialfunction.

5. Vorausgesetzt sei zunächst, dass die magnetisirenden Kräfte nur von solchen endlichen magnetischen Massen herrühren, die ausserhalb des Ringkörpers liegen, und von solchen elektrischen Strömen endlicher Intensität, die den Ring weder umkreisen noch auch durch die Ringmasse selbst fliessen. Dann wird die Funktion V überall im Innern des Ringes die Laplace'sche Differentialgleichung befriedigen und mit ihren Derivirten auch überall eindeutig, endlich und stetig sein.

Daher werden, wenn man auf der Oberfläche des Ringes eine Massenbelegung fingirt, deren Potentialwerte v_o in allen Punkten der Oberfläche zusammenfallen mit den daselbst herrschenden Potentialwerten V_o der äusseren magnetisirenden Kräfte, in Gemässheit des Dirichlet'schen Prinzipes auch für alle Punkte im Innern des Ringes die Potentialwerte v_i dieser fingirten Massenbelegung zusammenfallen müssen mit den Werten V_i in diesen Punkten. Dagegen werden natürlich für Punkte ausserhalb des Ringes die Funktionen v_a und V_a im allgemeinen verschiedene Werte besitzen. Die Dichtigkeit dieser fingirten Massenbelegung sei ganz allgemein als Funktion der Oberflächencoordinaten λ_o, ω_o, φ_o vorausgesetzt, wobei letztere im Sinne des von Carl Neumann inaugurirten Ringcoordinatensystems verstanden werden sollen und der ihnen angehängte Index o die Beziehung zum Oberflächenelemente do ausdrücken möge.

6. Folgendes ist die Definition dieser Coordinaten:

Legt man vom Mittelpunkte des Ringes an die Ringoberfläche einen Berührungskegel und schlägt um den Ringmittelpunkt als Centrum eine Kugel, welche die Ringoberfläche in deren Berührungslinie mit jenem Kegel durchschneidet, so sei der Schnittkreis dieser Kugel mit der Aequatorialebene des Ringes der Polarkreis des Ringes genannt. Einem beliebigen

Punkte des Raumes seien jene zwei Punkte des Polarkreises als Pole zugeordnet, in welchen dieser die durch den Raumpunkt und die Ringaxe gelegte Ebene durchschneidet. Dies festgesetzt, bezeichnet λ das von 0 bis 1 gezählte Verhältniss der beiden Strecken, die den Raumpunkt mit seinen beiden Polen verbinden, ω den von 0 bis 2π gezählten Winkel, welchen jene beiden Strecken mit einander einschliessen und φ die von 0 bis 2π gezählte Winkelcoordinate des einen der Pole auf dem Polarkreise. Demnach definirt

$\underbrace{\lambda = \text{const}}$ ein System von Ringflächen mit gemeinsamem Polarkreis,

$\underbrace{\omega = \text{const}}$ ein System von Kugelflächen, welche das System $\underbrace{\lambda = \text{const}}$ überall orthogonal durchschneiden und

$\underbrace{\varphi = \text{const}}$ eine Schaar von in der Ringaxe einander schneidenden Meridianebenen; die Schnitte derselben mit den beiden Flächenschaaren $\underbrace{\lambda = \text{const}}$ und $\underbrace{\omega = \text{const}}$ sind überall orthogonal.

7. In diesen Coordinaten ausgedrückt, lässt sich ein Oberflächenelement do des Ringes durch folgende Formel darstellen

$$\mathrm{do} = \frac{2a^2\lambda\,(1-\lambda^2)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\varphi}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}.$$

Hiebei ist mit a der Radius des Polarkreises bezeichnet.

Die auf diesem Oberflächenelemente sitzende fictive Massenbelegung hat, wenn μ ihre Dichtigkeit daselbst ist, den Wert $\mu\,\mathrm{do}$; ihr Potential auf eine inneren oder äusseren Punkt ist

$$\mathrm{d}v_i = \frac{2a^2\lambda\,(1-\lambda^2)}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}\,\mu\,T_i\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1i)$$

$$\mathrm{d}a_a = \frac{2a^2\lambda\,(1-\lambda^2)}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}\,\mu\,T_a\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1a)$$

T_i und T_a bedeuten hierin die reziproken Entfernungen des Elementes do von dem innerhalb des Ringes gelegenen Auf-Punkte $(\lambda_i, \omega_i, \varphi_i)$, beziehungsweise von dem ausserhalb gelegenen Punkte $(\lambda_a, \omega_a, \varphi_a)$. Eine Reihenentwicklung für dieselben gab C. Neumann in folgender Form:

$$T_i = \sqrt{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2)}\sum_p\sum_q C_p^q\,J_p^q(\lambda_i)\,A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i) \quad \ldots \quad 2i)$$

$$T_a = \sqrt{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2)}\sum_p\sum_q C_p^q\,J_p^q(\lambda)\,A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a). \quad 2a)$$

Die C_p^q, $J_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda)$ haben die Werte:

$$C_p^q = \frac{1}{2a}\,\frac{(1\cdot3\cdots2p-1)(1\cdot3\cdots2q-1)}{1\cdot3\cdots2p+2q-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$J_p^p(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Theta \cdot d\,\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2p+1}{2}}}, \quad \ldots\ldots 4)$$

$$A_p^q(\lambda) = \frac{\lambda^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Theta \cdot d\,\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}} \quad \ldots\ldots 5)$$

8. Das Gesammtpotential der dem V entsprechenden Oberflächenbelegung wird man erhalten, wenn man die im vorigen Artikel aufgestellten Gleichungen 1) nach den Argumenten ω und φ, je in den Grenzen von 0 bis 2π, integrirt. Es ist daher

$$v_i = \sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\,d\varphi\; F(\lambda,\omega,\varphi_i) \sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i), \quad 6i)$$

$$v_a = \sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\,d\varphi\; F(\lambda,\omega,\varphi_i) \sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a), \quad 6a)$$

wobei $F(\lambda, \omega, \varphi)$ eine neue Funktion der Oberflächencoordinaten ist, die mit der Dichtigkeitsfunktion μ der Gleichungen 1) durch folgende Relation verknüpft ist

$$F(\lambda,\omega,\varphi) = \frac{(1-\lambda^2)\,2a^2\lambda}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \mu \quad \ldots\ldots 7)$$

Der Auswertung der Integrationen sei eine Bemerkung über die formale Bedeutung des in den Gleichungen 2) und 6) auftretenden Summensymbols vorausgeschickt. Es bedeutet

$$\sum_p\sum_q C_p^q = \sum_p \left(C_p^0 + 2C_p^1 + 2C_p^2 + \ldots\ldots + 2C_p^\infty\right) \quad 8)$$

9. Wir machen nun für $F(\lambda, \omega, \varphi)$ folgenden Ansatz

$$F(\lambda,\omega,\varphi) = \sum_m\sum_n \Big[\mathfrak{A}_m^n(\lambda)\cos m\omega\cdot\cos n\varphi + \mathfrak{B}_m^n(\lambda)\cos m\omega\cdot\sin n\varphi + \mathfrak{C}_m^n(\lambda)\sin m\omega\cdot\sin n\varphi + \mathfrak{D}_m^n(\lambda)\sin m\omega\cdot\cos n\varphi\Big] \quad \ldots\ldots 9)$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichungen 6) ergibt sich

$$v_i = \sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}\left[A_i+B_i+\Gamma_i+\Delta_i\right], \quad 10i)$$

$$v_a = \sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}\left[A_a+B_a+\Gamma_a+\Delta_a\right]. \quad 10a)$$

Die in der eckigen Klammer stehenden griechischen Buchstaben sind Abkürzungen für folgende 8 Doppelintegrale:

$$A_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{A}_m^n(\lambda) \cos m\omega \cdot \cos n\varphi \sum_p \sum_p C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p(\omega - \omega_i) \cos q(\varphi - \varphi_i)$$

$$B_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{B}_m^n(\lambda) \cos m\omega \cdot \sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p(\omega - \omega_i) \cos q(\varphi - \varphi_i)$$

$$\Gamma_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{C}_m^n(\lambda) \sin m\omega \cdot \sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p(\omega - \omega_i) \cos q(\varphi - \varphi_i)$$

$$\Delta_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{D}_m^n(\lambda) \sin m\omega \cdot \cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p(\omega - \omega_i) \cos q(\varphi - \varphi_i)$$

$$A_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{A}_m^n(\lambda) \cos m\omega \cdot \cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega - \omega_a) \cos q(\varphi - \varphi_a)$$

$$B_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{B}_m^n(\lambda) \cos m\omega \cdot \sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega - \omega_a) \cos q(\varphi - \varphi_a)$$

$$\Gamma_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{C}_m^n(\lambda) \sin m\omega \cdot \sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega - \omega_a) \cos q(\varphi - \varphi_a)$$

$$\Delta_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{D}_m^n(\lambda) \sin m\omega \cdot \cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega - \omega_a) \cos q(\varphi - \varphi_a)$$

10. Die Integrationen lassen sich leicht durchführen, sofern man sich nur daran erinnert, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin r\alpha \cdot \cos s\alpha = 0, \text{ für beliebige } r \text{ und } s, \quad \ldots\ldots 11)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin r\alpha \cdot \sin s\beta = \begin{cases} = 0, \text{ für } r \gtrless s, & \ldots\ldots 12a) \\ = \pi, \text{ für } r = s \gtrless 0, & \ldots\ldots 12b) \\ = 0, \text{ für } r = s = 0, & \ldots\ldots 12c) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos r\alpha \cdot \cos s\beta = \begin{cases} = 0, \text{ für } r \gtrless s, & \ldots\ldots 13a) \\ = \pi, \text{ für } r = s \gtrless 0, & \ldots\ldots 13b) \\ = 2\pi, \text{ für } r = s = 0 & \ldots\ldots 13c) \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 11) kann das Integral B_i auch so geschrieben werden:

$$B_i = \int_0^{} d\omega \int_0^{} d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{B}_m^n(\lambda) \cos m\omega \sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p\omega \cdot \cos p\omega_i \sin q\varphi \cdot \sin q\varphi_i \quad \ldots 14)$$

Wir integriren zunächst nach φ. Würde man im Ausdrucke 14) die angezeigten Summenoperationen ausführen, so erhielte man eine vierfach unendliche Summe, deren allgemeines Glied mit Rücksicht auf die Bemerkung 8) folgendermassen lautet:

$$16\, B_m^n(\lambda)\, C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda) \cos m\omega \cdot \cos p\omega \cdot \cos p\omega_i \cdot \sin q\varphi_i \cdot \sin n\varphi \cdot \sin q\varphi.$$

Von dieser Summe werden bei der Integration nach der Variablen φ alle Glieder verschwinden, bei denen die Stellenzeiger n und q von einander verschieden sind und dann auch noch jenes Glied, bei welchem $n = q = 0$ ist. Die Integration der übrigen Glieder ergibt eine Summe, deren allgemeines Glied zufolge der Gleichung 12b) den Wert hat

$$16\pi\, \mathfrak{B}_m^q(\lambda)\, C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i \cdot \cos m\omega \cos p\omega.$$

Man sieht auch, dass man hiebei dem Stellenzeiger q wegen Vorhandenseins des Faktors $\sin q\varphi_i$ auch den Wert Null erteilen darf, unbeschadet der durch die Formel 12c) beschränkten Allgemeinheit der Formel 12b), so dass das Summensymbol in der in 8) definierten Bedeutung unbeschränkt wieder angewendet werden darf.

Bei der Integration nach ω werden auch wieder alle Glieder verschwinden, bei denen die Stellenzeiger m und p von einander verschieden sind; aber für $m = p = 0$ erhält man jetzt zufolge der Formel 13c) und unter Berücksichtigung der Bemerkung 8) die Beiträge:

$$8\pi^2\, \mathfrak{B}_0^q(\lambda)\, C_0^q\, J_0^q(\lambda_i)\, A_0^q(\lambda) \sin q\varphi_i.$$

Die übrigen Glieder liefern gemäss der Formel 13b) eine Summe vom allgemeinen Gliede

$$16\pi^2\, \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\, C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i.$$

Unser Integral kann daher allgemein geschrieben werden:

$$B_i = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\, C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i.$$

11. Bildet man in analoger Weise auch die übrigen Integrale, nnd setzt man dieselben in die Gleichungen 10) ein, so erhält man für das Potential unserer fingirten Oberflächenschicht die Werte

$$V_i = 4\pi^2 \sqrt{1 - 2\lambda_i \cos\omega_i + \lambda_i^2} \sum_p \sum_q C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda) \Big[\mathfrak{A}_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \cos q\varphi_i + \mathfrak{B}_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{C}_p^q(\lambda) \sin p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{D}_p^q(\lambda) \sin p\omega_i \cos q\varphi_i \Big] \quad \ldots \quad 16i)$$

$$V_a = 4\pi^2 \sqrt{1 - 2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2} \sum_p \sum_q C_p^q\, J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda) \Big[\mathfrak{A}_p^q(\lambda) \cos p\omega_a \cos p\varphi_a + \mathfrak{B}_p^q(\lambda) \cos p\omega_a \sin q\varphi_a +$$

$$+ \mathfrak{C}_p^q(\lambda) \sin p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{D}_p^q(\lambda) \sin p\omega_a \cos q\varphi_a \Big] \quad . \quad . \quad . \quad 16a)$$

12. Die Dichtigkeit der Oberflächenbelegung, welche diesen Potentialen entspricht, ist

$$\delta_v = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv}{dN_i} + \frac{dv}{dN_a}\right)$$

oder in Neumann'schen Ring-Coordinaten

$$\delta_v = \frac{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{8\pi a\lambda^2}\left[\left(\frac{dv_i}{d\lambda_i}\right)_o - \left(\frac{dv_a}{d\lambda_a}\right)_o\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Der angehängte Index o soll ausdrücken, dass nach geschehener Differentiation alle Coordinaten als Oberflächencoordinaten zu verstehen sind.

Unter Zugrundelegung der Poisson'schen Theorie leistet nun aber auch das Potential Φ zufolge der Gleichung II) überall im Innern des Ringes der Laplace'schen Differentialgleichung Genüge, und da gemäss den in Artikel 5 gemachten Voraussetzungen auch die übrigen Bedingungen der Anwendbarkeit des Dirichlet'schen Prinzipes erfüllt sind, so gilt alles, was in den Artikeln 5) bis 11) bezüglich des Potentiales V gesagt wurde, mutatis mutandis auch für Φ.

Bezeichnen wir die Potentiale der dem Φ entsprechenden Oberflächenschicht bezüglich innerer und äusserer Punkte mit φ_i und φ_a, so wird φ_i überall gleich sein müssen Φ_i, und es ist

$$\varphi_i = 4\pi^2\sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\Big[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_i\cos q\varphi_i + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_i\sin q\varphi_i +$$
$$+ \mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_i\sin q\varphi_i + \mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_i\cos q\varphi_i\Big], \quad . \quad . \quad . \quad 18i)$$

$$\varphi_a = 4\pi^2\sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a)\Big[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_a\cos q\varphi_a + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_a\sin q\varphi_a +$$
$$+ \mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_a\sin q\varphi_a + \mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_a\cos q\varphi_a\Big], \quad . \quad . \quad . \quad 18a)$$

Die Dichtigkeit δ_φ der entsprechenden Oberflächenschicht ist

$$\delta_\varphi = \frac{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{8\pi a\lambda^2}\left[\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)_o - \left(\frac{d\varphi_a}{d\lambda_a}\right)_o\right]_o. \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Zu den Dichtigkeiten δ_v und δ_φ dieser fingirten Oberflächenbelegungen kommt dann noch die Dichtigkeit des an der Oberfläche infolge der Magnetisirung ausgeschiedenen freien Magnetismus.

Diese ist zufolge der Gleichung III gleich

$$-k\frac{d\Phi}{dN_i}, \text{ oder auch}$$

$$\delta = + k \frac{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}{8\pi a \lambda^2} \left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

13. Da nach dem in Artikel 5) Auseinandergesetzten die Funktionen φ_i und v_i einzeln genommen gleich sind den Funktionen Φ_i und V_i, so kann die Gleichung I) speziell auch so geschrieben werden

$$\varphi_i + v_i + U_i = 0 \quad \ldots \ldots \quad IV)$$

Es wird für späterhin nützlich sein, schon hier zu bemerken, dass auch noch die Gleichung

$$\varphi_a + v_a + U_a = 0 \ldots \ldots \ldots \quad V)$$

zu Recht besteht, eine Gleichung, die aus I) nicht mit unmittelbarer Evidenz gefolgert werden kann, weil die Funktionen φ_a und v_a einzeln genommen nicht gleich sind den Funktionen Φ_a und V_a. Aber es ist die Summe $(\varphi_a + v_a)$ überall gleich der Summe $(\Phi_a + V_a)$; denn bezeichnen wir diese Summen für den Augenblick mit s und S, so genügt im ganzen äusseren Raume sowohl die Funktion S, wie man durch Anwendung der Δ-Operation auf die Gleichung I) sofort ersieht, der Laplace'schen Differenzialgleichung, als auch die Funktion s, weil diese von Massen herrührt, die nur an der Oberfläche des Ringes gedacht sind. Nun fallen aber die Funktionswerte von s und S für die Oberfläche des Ringes zusammen, weil für diese die φ_a und v_a als noch zulässige Grenzwerte der φ_i und v_i aufgefasst werden können; in Gemässheit des Dirichlet'schen Prinzipes müssen daher die Funktionen s und S auch im ganzen äusseren Raume zusammenfallen, womit die Evidenz für die Richtigkeit der Gleichung V), die wir später bei Berechnung des U_a zu benützen haben werden, gewonnen ist.

Die Gleichungen IV) und V) besagen, dass das Gesammtpotential der drei durch die Formeln 17, 19 und 20 definirten Oberflächenbelegungen überall verschwinden muss. Man genügt dieser Bedingung durch die Annahme, dass die resultirende Dichtigkeit unserer 3 Oberflächenbelegungen überall gleich Null ist und dies ist zufolge der Eindeutigkeit unseres Problems zugleich die einzige Lösung dieser Gleichungen. Es muss also sein

$$\delta_v + \delta_\varphi + \delta = \frac{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}{8\pi a \lambda^2} \left[\left(\frac{dv_i}{d\lambda_i}\right) - \left(\frac{dv_a}{d\lambda_a}\right) + \left(1 + 4\pi k\right)\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right) - \left(\frac{d\varphi_a}{d\lambda_a}\right)\right]_0$$

oder

$$1 = - \left[\frac{\left(\frac{dv_a}{d\lambda_a}\right) - \left(\frac{dv_i}{d\lambda_i}\right)}{\left(\frac{d\varphi_a}{d\lambda_a}\right) - \left(1 + 4\pi k\right)\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)}\right]_0 = 0 \quad \ldots \ldots \quad 21)$$

14. Vor Durchführung der in dieser Gleichung angezeigten Opera-

tionen wollen wir die Gleichungen 16) und 18) ein wenig umgestalten. Wir setzen für den Augenblick

$$\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} = W(\lambda,\omega)$$

und entwickeln diese Funktion in eine nach den Cosinus der Vielfachen von ω fortschreitende Reihe. Man erhält

$$W(\lambda,\omega) = \sum_n K_n(\lambda)\cos n\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 22)$$

wobei mit Rücksicht auf die in 8) gegebene Definition des Summensymbols die Koëffizienten K_n ganz allgemein (einschliesslich $n = o$) den Wert haben

$$K_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \cos n\omega \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} \quad \ldots\ldots 23)$$

Nach Substitution des Ausdruckes 22 in die Gleichungen 16) und 18) lauten diese

$$v_i = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda_i) K_n(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \Big[\mathfrak{A}_p^q(\lambda)\cos p\omega_i \cos q\varphi_i + \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\cos p\omega_i \sin p\varphi_i + \mathfrak{C}_p^q(\lambda)\sin p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{D}_p^q(\lambda)\sin p\omega_i \cos q\varphi_i\Big] \ldots 24i)$$

$$v_a = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda) K_n(\lambda_a) A_p^q(\lambda_a) \Big[\mathfrak{A}_p^q(\lambda)\cos p\omega_a \cos q\omega_a + \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\cos p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{C}_p^q(\lambda)\sin p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{D}_p^q(\lambda)\sin p\omega_a \cos q\varphi_a\Big] \ldots 24a)$$

$$\varphi_i = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda_i) K_n(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \Big[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_i \cos q\omega_i + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_i \cos q\varphi_i\Big] \ldots 25i)$$

$$\varphi_a = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda) K_n(\lambda_a) A_p^q(\lambda_a) \Big[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_a \cos p\omega_a + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\varphi_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_a \sin q\omega_a + \mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_a \cos q\varphi_a\Big] \ldots 25a)$$

15. Die weitläufigen Entwicklungen, zu denen die Substitution dieser zuletzt erhaltenen Werte in die Gleichung 21) führt, wollen wir hier nicht hinschreiben; sie vereinfachen sich erheblich, sobald man nach Ausführung der angezeigten Differenzationen gesetzt hat

$$\lambda_i = \lambda_a = \lambda,\ \omega_i = \omega_a = \omega,\ \varphi_i = \varphi_a = \varphi,$$

und liefern schliesslich folgende Bedingungsgleichung

$$1 = -\frac{\sum\sum\sum C_p^q K_n(\lambda)\Big[J_p^q(\lambda)\frac{dA_p^q(\lambda)}{d\lambda} - A_p^q(\lambda)\frac{dJ_p^q(\lambda)}{d\lambda}\Big]\cos n\omega\Big[\mathfrak{A}_q^q(\lambda)\cos p\omega\cos q\varphi + \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\cos p\omega\sin q\varphi +}{\sum\sum\sum C_p^q\Big[K_n(\lambda)\Big\{J_p^q(\lambda)\frac{dA_p^q(\lambda)}{d\lambda} - A_p^q(\lambda)\frac{dJ_q^p(\lambda)}{d\lambda}\Big\} - 4\pi k A_p^q(\lambda)\Big\{K_n(\lambda)\frac{dJ_p^q(\lambda)}{d\lambda} - J_p^q(\lambda)\frac{dK_n(\lambda)}{d\lambda}\Big\}\Big]\cos n\omega}$$

$$\frac{\mathfrak{C}^q_p(\lambda)\sin p\omega \sin q\varphi + \mathfrak{D}^q_p(\lambda)\sin p\omega\cos q\varphi\Big]}{\Big[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega\cos q\varphi + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega\sin q\varphi + \ldots\ldots\Big]} \quad \ldots 26)$$

Diese Bedingungsgleichung wird identisch erfüllt, wenn gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}(\lambda) &= \mathfrak{A}^q_p(\lambda)\ P,\\ \mathfrak{F}(\lambda) &= \mathfrak{B}^q_p(\lambda)\ P,\\ \mathfrak{G}(\lambda) &= \mathfrak{C}^q_p(\lambda)\ P,\\ \mathfrak{H}(\lambda) &= \mathfrak{D}^q_p(\lambda)\ P, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 27)$$

Hiebei hat P den Wert

$$P = -\frac{1}{1 + \dfrac{4\pi k\, A^q_p(\lambda)}{K_n(\lambda)} \cdot \dfrac{J^q_p(\lambda)\, K'_n(\lambda) - J'^q_p(\lambda)\, K_n(\lambda)}{J^q_p(\lambda)\, A'^q_p(\lambda) - J'^q_p(\lambda)\, A^q_p(\lambda)}} \quad \ldots 28)$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\frac{d\,A^q_p(\lambda)}{d\lambda} = A'^q_p(\lambda),\quad \frac{d\,J^q_p(\lambda)}{d\lambda} = J'^q_p(\lambda) \text{ und } \frac{d\,K_n(\lambda)}{d\lambda} = K'_n(\lambda).$$

Auf die Funktionen $J^q_p(\lambda)$ und $A^q_p(\lambda)$ werden wir im späteren Verlaufe unserer Untersuchung noch zu sprechen kommen; die erstere kann man auch zur Darstellung der Funktion K benützen. Es ist nämlich

$$K'_n(\lambda) = \lambda \cdot J^o_n(\lambda) - \tfrac{1}{2}\left[J^o_{n+1}(\lambda) + J^o_{n-1}(\lambda)\right]$$

15. Durch die Gleichungen 28, 27 und 25i ist die Funktion φ_i bestimmt. Damit das Problem, das wir uns in diesem § gestellt haben, vollständig gelöst sei, müssen wir noch die Funktion U_a berechnen. Hiezu benützen wir die in Artikel 13 bewiesene Gleichung V)

$$\varphi_a + v_a + U_a = 0.$$

Diese ergibt unter Zuhilfenahme der Gleichungen 24a und 25a

$$U_a = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C^q_p\, J^q_p(\lambda)\, K_n(\lambda_a)\, A^q_p(\lambda_a)\cos n\omega_a \Big[\mathfrak{K}(\lambda)\cos p\omega_a \cos q\varphi_a + \mathfrak{L}(\lambda)\cos p\omega_a \sin q\varphi_a +$$

$$+ \mathfrak{M}(\lambda)\sin p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{N}(\lambda)\sin p\omega_a \sin q\varphi_a\Big] \quad \ldots 29)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}(\lambda) &= \mathfrak{A}^q_p(\lambda)\cdot Q\\ \mathfrak{L}(\lambda) &= \mathfrak{B}^q_p(\lambda)\cdot Q\\ \mathfrak{M}(\lambda) &= \mathfrak{C}^q_p(\lambda)\cdot Q\\ \mathfrak{N}(\lambda) &= \mathfrak{D}^q_p(\lambda)\cdot Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 30)$$

und

$$Q = -\frac{1}{1 + \frac{K_n(\lambda)}{4\pi k\, A_p^q(\lambda)} \cdot \frac{J_p^q(\lambda)\, A'^q_p(\lambda) - J'^q_p(\lambda)\, A_p^q(\lambda)}{J_p^q(\lambda)\, A'^q_p(\lambda) - J'^q_p(\lambda)\, A_p^q(\lambda)}} \quad \ldots 31)$$

16. Die beiden Gleichungs-Systeme 31, 30, 29 und 28, 27, 25_i stellen die Lösung unseres Problems dar; denn die Potentialfunktion U_a bestimmt im Vereine mit φ_i den magnetischen Zustand des Ringes. Die Derivirten von U_a liefern die Kräfte, welche der Ring nach aussen ausübt, die von φ_i aber seine magnetischen Momente. So ist, um nur je ein Beispiel anzuführen, die Kraft, mit welcher der magnetisirte Ring einen im Punkte (λ_a, ω_a, φ_a) befindlichen Magnetpol μ parallel zur Ring-Mittellinie forttreibt, gleich

$$-\frac{1-2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2}{a\,(1-\lambda_a^2)}\, 4\pi^2 \mu \sum\sum\sum q\, C_p^q\, J_p^q(\lambda)\, K_n(\lambda_a)\, A_p^q(\lambda_a) \cos n\omega_a \Big[-\mathfrak{K}(\lambda) \cos p\omega_a \sin q\varphi_a +$$

$$+ \mathfrak{L}(\lambda) \cos p\omega_a \cos q\varphi_a + \mathfrak{M}(\lambda) \sin p\omega_a \cos q\varphi_a - \mathfrak{N}(\lambda) \sin p\omega_a \sin q\varphi_a \Big] \quad \ldots 32)$$

und das im Punkte (λ_i, ω_i, φ_i) in derselben Richtung geschätzte magnetische Moment ist gleich

$$-\frac{1-2\lambda_i \cos\omega_i + \lambda_i^2}{a\,(1-\lambda_i^2)}\, 4\pi^2 k \sum\sum\sum q\, C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, K_n(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda) \cos n\omega_i \Big[-\mathfrak{E}(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i +$$

$$+ \mathfrak{F}(\lambda) \cos p\omega_i \cos q\varphi_i + \mathfrak{G}(\lambda) \sin p\omega_i \cos q\varphi_i - \mathfrak{H}(\lambda) \sin p\omega_i \sin q\varphi_i \Big] \quad \ldots 33)$$

§ 3. Erweiterung der Lösung für magnetisirende Kräfte mehrdeutigen Potentiales.

17. Wir wollen nunmehr unsere allgemeine Lösung für den Fall erweitern, dass das magnetische Feld ganz oder zum Teil von elektrischen Strömen verursacht wird, die den Ring umkreisen, d. i. von solchen Strömen, durch welche man keine von ihnen umrandete Fläche zu legen imstande ist, ohne den zweifach zusammenhängenden Ringkörper in einen einfach zusammenhängenden Raum zu zerschneiden. Auf diesen Fall sind die bisherigen Schlüsse nicht anwendbar. Denn die Potentialfunktion V ist dann im Innern des Ringes bekanntlich eine mehrdeutige Funktion, und wir dürfen daher nicht mehr wie bei den Deductionen im vorhergehenden § das Dirichlet'sche Prinzip in Anspruch nehmen. In der That gibt es jetzt keine Oberflächenbelegung mehr, deren Potential überall im Innern des Ringes mit V_i sich deckt.

In den §§ 4 und 5 seiner oben citirten Abhandlung hat Kirchhoff einen analogen Fall für den unendlichen Cylinder behandelt und daselbst eine Methode gelehrt, welche über die erwähnte Schwierigkeit hinweghilft. Wir wollen aber einen Kunstgriff angeben, der hier rascher zum Ziele führt als die Anwendung der Kirchhoff'schen Methode.

18. Wir fügen nämlich willkürlich zu jedem den Ring umkreisenden Strome S_k einen durch die Axe des Ringes fliessenden unendlich langen geradlinigen Strom S_a hinzu. Die Intensität dieses Axenstromes soll genau gleich der des Stromes S_k sein, seine Richtung aber soll definirt sein wie folgt: Wir denken uns an eine beliebige Stelle des Ringes eine menschliche Figur so hingelegt, dass ihre Füsse dem Mittelpunkte des Ringes zugekehrt sind und ihre ausgestreckten Arme zur Ringaxe parallel stehen. Sieht dann dieses Individuum den Strom S_k im Sinne des Uhrzeigers fliessen, so soll die Richtung dss Axenstromes die von seiner linken zur rechten Hand sein.

Im Unendlichen soll sich der Strom S_a in beliebiger Weise schliessen. Eine leichte Überlegung lässt dann erkennen, dass die magnetische Potentialfunktion der beiden Ströme S_k und S_a zusammengenommen innerhalb des Ringes nicht mehr mehrdeutig, sondern vollkommen eindeutig ist. Es wird daher alles, was in den Artikeln 6 bis 16 ausgeführt wurde, jetzt wieder zu Recht bestehen.

Man berechne daher nach den im § 2 entwickelten Formeln die Magnetisirung, wie sie durch die Coëxistenz der Ströme S_k und S_a, sowie durch die übrigen magnetisirenden Ursachen bedingt wird. Hievon subtrahiere man dann — (das Superpositionsprinzip darf ja wegen der Linearität der hieher gehörigen Differenzialgleichungen ohne weiteres in Anspruch genommen werden) — die Magnetisirung des Ringes, wie sie durch die willkürlich hinzugefügten Axenströme allein verursacht wird.

19. Diese letztere Magnetisirung lässt sich aber ohne jeden Aufwand eines mathematischen Apparates lediglich auf Grund einer ganz elementaren Ueberlegung ermitteln.

Betrachtet man nämlich vorerst einen unendlich dünnen Ring, eine Ringfaser, so ist klar, dass dieselbe, wodurch und wie immer sie auch magnetisirt sein mag, auf sich selbst Kräfte ausüben wird, die gegenüber der als endlich vorausgesetzten äusseren magnetisirenden Kraft verschwinden. Die Ringfaser wird daher so magnetisirt werden, wie wenn nur diese Kraft allein vorhanden wäre. Dieselbe ist, wenn die Magnetisirung von einem unendlichen Axenstrom herrührt, durch das Biot-Savart'sche Gesetz

$$\frac{2\,i}{r} \quad \ldots\ldots\ 34)$$

gegeben, und ihre Richtung ist überall die der Mittellinie der Faser. Nur in dieser Richtung erfolgen daher die magnetischen Verschiebungen, an die Oberfläche der Faser wird kein freier Magnetismus hingeschoben. Die Wirkung der so magnetisirten Faser nach Aussen hin ist demnach nicht etwa bloss unendlich klein von der Grössenordnung der unendlich kleinen Dicke der Faser sondern absolut gleich Null.

Ist nunmehr der Ring von endlicher Dicke, so kann man sich denselben aus unendlich vielen unendlich dünnen Ringfasern zusammengesetzt denken, deren jede für sich allein so magnetisirt wird, dass der magnetische Momentvektor zufolge der Formel 34) den Wert hat

$$\mu = k\frac{2\,i}{r}, \quad \ldots\ 35)$$

eine Magnetisirung, an der die Coëxistenz aller übrigen Ringfasern nichts ändert.

r bedeutet die Entfernung des Aufpunktes von der Ringaxe, i die Intensität des Axenstromes.

20. Für das in diesem § gestellte Problem lautet demnach die Lösung: „Man füge zu jedem jener Ströme, die den Ring umschlingen, einen Axenstrom von der im Artikel 18 präzisirten Art hinzu und bestimme hierauf die nur von den Oberflächen-Constanten des Ringes und dem magnetisirenden Felde abhängigen Coëffizienten $\mathfrak{A}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{B}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{C}_p^q(\lambda)$ und $\mathfrak{D}_p^q(\lambda)$. Dann ist das Potential U_a des Ringes, abgesehen von einer Constanten, wiederum durch die Formeln 29, 30, 31 gegeben. Die magnetischen Momente des Ringes aber sind gleich den Derivirten der durch die Formeln 25i, 27, 28 gegebenen Funktion φ_i, vermindert um den Wert

$$\frac{2\,k\cdot\Sigma i}{r}\cos(\mathfrak{M},\mathfrak{R}), \quad . \; 36)$$

wo cos $(\mathfrak{M}, \mathfrak{R})$ der Cosinus jenes Winkels ist, den die Mittellinie $\mathfrak{M}$ des Ringes mit der Richtung $\mathfrak{R}$ bildet, nach welcher das Moment geschätzt wird, und Σi die Intensität des resultirenden Axenstromes darstellt."

Natürlich kann auch der Fall eintreten, dass Σi gleich Null wird, was besagt, dass man nicht immer nöthig haben wird, den Strömen, die den Ring umschlingen, Axenströme hinzuzufügen. Wenn beispielsweise ein elektrischer Strom den Ring zweimal umschlingt, so dass die Umschlingung die Form einer ∞-Schleife hat, dann ist das Potential desselben im Innern des Ringes ohnedies schon eindeutig und es bedarf der Hinzufügung eines Hilfsstromes nicht mehr.

§ 4. Magnetisirung eines Ringes, der nur an einer einzigen Stelle von einem elektrischen Strome umflossen ist.

21. Im Bisherigen wurde die Theorie der Magnetisirung eines Ringes in ihrer grössten Allgemeinheit entwickelt. In speziell vorgegebenen Fällen erübrigt sich lediglich die Bestimmung der vier Funktionen $\mathfrak{A}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{B}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{C}_q^q(\lambda)$ und $\mathfrak{D}_p^q(\lambda)$.

Es sollen diese Funktionen für den Fall bestimmt werden, dass die Magnetisirung von einem Kreisstrome herrührt, der den Ring nur an einer einzigen Stelle umfliesst. Die Gleichungen der Strombahn sollen sein

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= 0,\\ \lambda &= c,\end{aligned}\right\}$$

wo $c \geqq \lambda_0$ ist. Durch die erste dieser Gleichungen ist schon ausgedrückt, dass wir die Umkreisungsstelle als Ausgangsort für die Zählung der Coordinate φ festsetzen. Als Ausgangslage für die Zählung der Coordinate ω soll jene Ebene gelten, welche durch die Mittellinie des Ringes bestimmt ist (die „Aequatorialebene").

22. Wir wollen nunmehr von dem im vorigen § ausführlich erörterten Kunstgriff Gebrauch machen und unserem Kreisstrome einen unendlich langen und in der Unendlichkeit sich schliessenden Axenstrom hinzufügen, von der im Artikel 18) präzisirten Art. Die magnetische Potentialfunktion der beiden Ströme bezogen auf einen Punkt, dessen λ-Coordinate kleiner ist als c, lässt sich am bequemsten durch folgende Betrachtungsweise ermitteln.

Wir construiren eine unendlich grosse keilförmige Platte so, dass deren eine Begrenzungsebene mit der Ebene unseres Kreisstromes zusammenfällt. Die Kante des Keils soll in der Ringaxe liegen, der Neigungswinkel desselben soll die unendlich kleine im Uebrigen aber willkürliche Grösse $d\varphi$ besitzen. Dort wo sich der Kreisstrom befindet, soll die Platte ein Loch haben, das von dem Strome umrandet wird. Diesen Keil belegen wir auf jener Seite,

von der aus gesehen der Kreisstrom im Uhrzeigersinne zu fliessen scheint, mit Nordmagnetismus, auf der anderen Seite mit Südmagnetismus. Die variable Dichte δ der Belegung soll überall der Gleichung genügen

$$i = \delta \cdot r \cdot d\varphi ,$$

wobei i die Intensität unseres Stromes und r die Entfernung des dem δ entsprechenden Flächenelementes von der Ringaxe ist. Für das magnetische Potential dieser so transversal magnetisirten keilförmigen Platte findet man unschwer folgende Formel

$$V_i = i \int_c^1 d\lambda_a \int_0^{2\pi} d\omega_a \frac{4a\,\lambda_a}{(1-\lambda_a^2)\,(1-2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2)} \frac{d\,T_{ai}}{d\,\varphi_a}, \quad \ldots 37)$$

und dies muss, wie man leicht erkennt, zugleich auch die magnetische Potentialfunktion unserer beiden Ströme sein. T_{ai} ist hiebei die Entfernung des Punktes $(\lambda_a, \omega_a, \varphi_a)$ vom Aufpunkte $(\lambda_i, \omega_i, \varphi_i)$. Hiefür können wir im Anschluss an die Gleichung 2) schreiben

$$T_{ai} = \sqrt{1-2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2}\,\sqrt{1-2\lambda_i \cos\omega_i + \lambda_i^2} \sum\sum C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega_a - \omega_i) \cos q(\varphi_a - \varphi_i),$$

worin wir für φ_a den Wert Null noch nicht eingesetzt haben, weil nach dieser Coordinate vorerst noch zu differenziren ist. Differenzirt man, setzt darnach $\varphi_a = 0$ und substituirt den so erhaltenen Wert von $\frac{d\,T_{ai}}{d\,\varphi_a}$ in die Gleichung 37, so erhält man

$$V_i = 4a\,i \sqrt{1-2\lambda_i \cos\omega_i + \lambda_i^2} \sum\sum C_p^q\, J_p^q(\lambda_i)\, q \sin q\,\varphi_i \int_0^1 d\lambda_a \int_0^{2\pi} d\omega_a \frac{\lambda_a\, A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega_a - \omega_i)}{(1-\lambda_a^2)\sqrt{1-2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2}} \quad 38)$$

Das Integral nach dem Argumente $d\omega_a$ lässt sich sehr bequem auswerten, wenn man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2}}$ in eine Fourier'sche Reihe entwickelt. Man kann diese Reihe, da die Coëffizienten der Sinus-Glieder verschwinden müssen, in der Form schreiben

$$\sum_m X_m(\lambda_a) \cos m\omega_a ,$$

wobei die Coëffizienten X_m mit Einschluss des Stellenzeigers $m = o$ die Werte haben

$$X_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos mx\, dx}{(1-2\lambda \cos x + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieselbe Formel erhält man, wenn man in der Gleichung 4) $p = m$ und $q = o$ setzt. Also ist $X_m = J_m^o(\lambda_a)$. Nach Einführung dieser Substitution in die Gleichung 38) ergibt die Auswertung der Integration nach ω

$$V_i = 8a\pi i \sqrt{1-2\lambda_i \cos\omega_i + \lambda_i^2} \sum_p \sum_p C_p^q J_p^q(\lambda_i)\, q \sin q\varphi_i \cos p\omega_i \int_0^1 d\lambda \frac{\lambda A_p^q(\lambda) J_p^o(\lambda)}{1-\lambda^2} \quad \ldots \quad 39)$$

23. Aus der soeben erhaltenen Gleichung ergeben sich für die gesuchten vier Funktionen folgende Werte

$$\mathfrak{A}_p^q(\lambda) = 0\,,$$

$$\mathfrak{B}_p^q(\lambda) = \frac{2ia\,q}{\pi A_p^q(\lambda)} \int_0^1 d\lambda \frac{\lambda A_p^q(\lambda) J_p^o(\lambda)}{1-\lambda^2} \quad \ldots \quad 40)$$

$$\mathfrak{C}_p^q(\lambda) = 0\,,$$

$$\mathfrak{D}_p^q(\lambda) = 0.$$

Das Verschwinden der $C_p^q(\lambda)$ und $D_p^p(\lambda)$ involvirt eine in Bezug auf die Aequatorialebene des Ringes symmetrische Verteilung der durch die Magnetisirung des Ringes auf dessen Oberfläche ausgeschiedenen freien Magnetismen. Das Verschwinden der $\mathfrak{A}_p^q(\lambda)$ aber sagt aus, dass diese freien Magnetismen an zwei zur Ebene des Kreisstromes symmetrisch gelegenen Punkten der Ring-Oberfläche den absoluten Werten nach gleich, den Zeichen nach entgegengesetzt sind.

Die Funktionen $A_p^q(\lambda)$ und $J_p^o(\lambda)$ lassen sich vermittelst der Gauss'schen (hypergeometrischen) Reihe darstellen. Es ist

$$A_p^q(\lambda) = \left(\tfrac{1}{8}\right)^q \frac{(2p+1)\cdot(2p+3)\cdot\cdots\cdot(2p+2q-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot q} \lambda^p (1-\lambda^2)^q F\left(q+\tfrac{1}{2},\ p+q+\tfrac{1}{2},\ 2q+1,\ 1-\lambda^2\right). \quad \ldots \quad 41)$$

und

$$J_p^o(\lambda) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^p \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2p-1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p} \lambda^p F\left(\tfrac{1}{2},\ p+\tfrac{1}{2},\ p+1,\ \lambda^2\right), \quad \ldots \quad 42)$$

wo F die übliche abkürzende Bezeichnungsweise für die Gauss'sche Reihe ist. Man erkennt dann sofort, dass das in 40) auftretende bestimmte Integral für jeden Stellenzeiger von p und q (ausgenommen den Fall $q = o$) die Form hat

$$\int_0^1 \lambda^m (1-\lambda^2)^n d\lambda, \quad \ldots \quad 43)$$

also die eines sehr einfachen binomischen Integrals, dessen Wert für jeden Stellenzeiger von m und n sehr leicht angebbar ist. Einer besonderen Untersuchung bedarf nur der Fall $q = o$. Hier erhält man für die obere Grenze den Wert ∞ von der Ordnung log nat ∞. Da jedoch die Funktion $\mathfrak{B}_p^q(\lambda)$ mit dem Faktor q behaftet ist, der im vorliegenden Fall wie $\frac{1}{\infty}$ verschwindet, so liefern die Glieder, die mit dem Stellenzeiger $q = o$ behaftet sind, keinen

Beitrag zu unserem Integral und dürfen daher von vornherein vernachlässigt werden.

24. Es sei hier nachträglich noch einiges über die Zeichengebung bemerkt, die man eintreten lassen muss, damit alle Formel-Entwicklungen dieser Abhandlung auch in Bezug auf ihr Vorzeichen correkt seien. Hiezu setzen wir zunächst eine Richtung der Ringaxe als positive fest und wollen einen elektrischen Strom, der nach dieser Richtung die Axe durchfliesst, mit positivem, einen entgegengesetzt fliessenden mit negativem Vorzeichen behaften. Um nun die positive Zählrichtung der Coordinate φ festzulegen, bewegen wir uns aus der Aequatorialebene des Ringes um eine beliebige Strecke nach der Richtung heraus, die wir als die positive Axenrichtung vorher willkürlich festgesetzt haben; dann soll jener Zählungssinn der Coordinate φ als positiv gelten, der vom Endpunkte jener Strecke aus betrachtet dem Drehungssinne des Uhrzeigers entgegengesetzt ist.

Nun legen wir einen Querschnitt durch den Ring und bewegen uns aus demselben längs der Ring-Mittellinie um einen kleinen Bogen in jenem Sinne heraus, den wir soeben als den positiven Zählungssinn des φ definirt haben. Es soll dann wiederum jener Umkreisungssinn des Querschnittes als positiver Zählungssinn der Coordinate ω gelten, welcher vom Endpunkte des Bogens aus gesehen, dem Drehungssinne des Uhrzeigers entgegenläuft.

Eine Magnetismusmenge sei positiv bezeichnet, wenn sie nord-, negativ, wenn sie süd-magnetisch ist, und das magnetische Potential sei stets auf einen Aufpol bezogen, der die Einheit des Nordmagnetismus enthält.

§ 5. Bemerkung zum Kirchhoff'schen Ringprobleme.

25. Kirchhoff hat 1870 im 5. Ergänzungsbande von Poggendorff's Annalen die Magnetisirung eines von einem Solenoide ganz umschlossenen Eisenringes berechnet. Man kann dieselbe auch ohne Aufwand eines mathematischen Apparates durch folgende einfache Ueberlegung erschliessen.
Wir denken uns den ganzen ausserhalb des magnetisirenden Solenoides liegenden unendlichen Raum mit lauter ringförmig geschlossenen einander unendlich benachbarten Solenoiden angefüllt, deren jedes ebensoviele (n) Windungen hat wie das Hauptsolenoid und auch von demselben Strome i durchflossen wird wie jenes; allen sei die Ringaxe gemeinsame Rotationsaxe. Die Querschnitte des Eisenringes und der Solenoide dürfen beliebig gestaltet sein.

26. Dazu ist nun zweierlei zu bemerken. Zunächst ist klar, dass durch Hinzufügung derlei geschlossener Solenoide an dem magnetischen Felde innerhalb des Hauptsolenoides nichts geändert wird. Zweitens aber lehrt der blosse Anblick einer Figur, die man sich nach den Angaben des vorigen Artikels macht, dass die Wirkungen aller Solenoidströme, da immer je zwei unendlich benachbarte Stromteile entgegengesetzt gerichtet fliessen, einander vollkommen vernichten, mit Ausnahme der Randtheile. Diese letzteren aber setzen sich
1. aus so vielen längs der Rotationsaxe fliessenden Strömen von der Intensität i zusammen, als jedes der Solenoide Windungen besitzt und
2. aus ebenso vielen in der Unendlichkeit zurückfliessenden Strömen.

27. Da die Wirkung der letzteren verschwindend klein ist, so kommt nur die der n Axenströme in Betracht. Diese aber erzeugen zufolge der Gleichung 35), die wir im Artikel 19 gleichfalls auf ganz elementarem Wege gefunden haben, im Eisenringe ein magnetisches Moment vom Werte

$$\mu = k \frac{2 i n}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 44)$$

Genau denselben Wert hat Kirchhoff a. a. O. für die Magnetisirung eines von einem elektrischen Strome ganz umflossenen Eisenringes berechnet.